Paires de structures de contact sur les variétés de dimension trois

Vincent Colin, Sebastiao Firmo

Paires de structures de contact sur les variétés de dimension trois

Vincent Colin et Sebastião Firmo

Résumé. On introduit une notion de paire positive de structures de contact sur les variétés de dimension trois qui généralise celle de [ET, Mi1, Mi2]. Une telle paire « normale » donne naissance à un champ de plans continu et localement intégrable λ. On montre que si λ est uniquement intégrable et si les structures de contact sont tendues, alors le feuilletage intégral de λ est sans composante de Reeb d'âme homologue à zéro. De plus, dans ce cas, la variété ambiante porte un feuilletage sans composante de Reeb. On démontre également un théorème de stabilité « à la Reeb » pour les paires positives de structures tendues.

Mots clés : structure de contact, paire, feuilletage, tendu, composante de Reeb
Codes AMS : 57R17, 57M50, 57R30.

1 Introduction

En dimension trois, Eliashberg-Thurston [ET] et Mitsumatsu [Mi1, Mi2] associent à toute paire (ξ_+, ξ_-) de structures de contact transversales, où ξ_+ est positive et ξ_- négative, une paire de champs de plans (λ_+, λ_-) transversaux, continus et localement (non uniquement) intégrables : par tout point passe un germe de surface intégrale de $\lambda_\pm$. L'intersection $\xi_+ \cap \xi_-$ est alors dirigée par un champ de vecteurs « conformément » Anosov. Réciproquement, cette situation se rencontre lorsqu'on étudie les directions stables et instables $\lambda_\pm$ d'un champ de vecteurs Anosov, les structures $\xi_\pm$ apparaissant comme « plans médians » des $\lambda_\pm$.

Du point de vue de la géométrie de contact, le fait d'imposer à ξ_+ et ξ_- d'être des structures transversales est trop contraignant. Le but du présent article est d'étudier le cas de paires (ξ_+, ξ_-) où l'on relâche cette condition pour la remplacer par une propriété de coïncidence positive : les champs de plans ξ_+ et ξ_- ne sont jamais « dos-à-dos ». Autrement dit, ils sont transversaux à un même champ de droites $\mathcal{D}$. Dans cette situation, on perd l'existence d'un des deux champs intégrable $\lambda_\pm$, mais on en préserve un, λ, coincé entre ξ_+ et ξ_- et lui aussi transversal à $\mathcal{D}$. Comme auparavant, le champ λ est localement intégrable et en général seulement continu : il n'y a pas unicité locale des surfaces intégrales, ni donc *a priori* de feuilletage intégral global. Lorsque cette unicité est avérée, par exemple sous les conditions du théorème 3.4, les propriétés de rigidité des structures ξ_+ et ξ_- rejaillissent sur celle du feuilletage intégral : si celles-là sont tendues, celui-ci est sans composante de Reeb d'âme homologue à zéro et la variété ambiante porte un feuilletage sans composante de Reeb (théorème 3.3). Notre leitmotiv est que cette notion de paire positive de structures de contact tendues pourrait être une bonne généralisation de celle de feuilletage sans composante de Reeb. En particulier, d'après Eliashberg et Thurston [ET], tout feuilletage tendu (et même tout feuilletage sans composante de Reeb [Co1]) est limite de paires positives de structures de contact tendues. Pour conclure, on démontre pour les paires positives de structures de contact tendues un analogue du théorème de stabilité de Reeb pour les feuilletages (théorème 4.1). Ce résultat semble faire écho à la théorie des courbes holomorphes. Son pendant a en effet été démontré par Eliashberg et Hofer [EH], *via* une méthode de remplissage par des disques holomorphes. Par certains aspects, les résultats de cet article peuvent être vus comme une version topologique des feuilletages d'énergie finie de Hofer, Wyzocki et Zehnder [HWZ]. La notion de paire positive est également bien adaptée à celle de surface branchée, connue dans le monde intégrable pour rendre compte des propriétés des laminations. Zannad tire bénéfice de ce parallèle dans [Za1, Za2] en trouvant une condition suffisante, inspirée de la géométrie de contact, pour qu'une surface branchée porte une lamination.

Remerciements. Ce travail a été rendu possible par l'accord France-Brésil, grâce auquel nous avons pu séjourner à l'Université Federal Fluminense et à l'Université de Nantes. Il a également bénéficié du support de l'Institut Universitaire de France et de l'ANR Symplexe. Nous souhaitons saluer ces institutions pour leur soutien. Le rapporteur anonyme d'une première version de ce texte y a relevé de nombreuses erreurs. Cette nouvelle mouture doit beaucoup à la qualité de son travail. Nous lui adressons nos plus vifs remerciements.

2 Paires de structures de contact

2.1 Structures de contact

Une *structure de contact* (orientable) sur une variété orientée V de dimension trois est un champ de plans orientable lisse ξ, noyau d'une 1-forme α dont le produit extérieur avec $d\alpha$ ne s'annule pas. Le signe de ξ est celui de $\alpha \wedge d\alpha$, rapporté à l'orientation de V. À l'opposé des feuilletages, les structures de contact supportent bien les déformations : la condition de contact est ouverte pour la topologie C^1 et, d'après un théorème de Gray [Gr], tout chemin de structures de contact est le fait d'une isotopie de V issue de l'identité.

Une structure de contact ξ est *tendue* si aucun disque plongé dans V ne s'appuie sur une courbe intégrale de ξ transversalement à ξ. Dans le cas contraire, on dit que ξ est *vrillée*. Une structure de contact est *universellement tendue* lorsque son rappel dans le revêtement universel de V est tendu.

Soit γ une courbe plongée dans V qui borde une surface compacte, plongée et orientable S. Si γ est transversale à ξ, l'autoenlacement $l(\gamma)$ de γ est l'enlacement entre γ et toute courbe obtenue en poussant légèrement γ par une section non singulière de $\xi|_S$. De même, si γ est *legendrienne*, c'est-à-dire tangente à ξ, son invariant de Thurston-Bennequin est l'entier $tb(\gamma)$ obtenu en comptant l'enlacement entre γ et sa déformation dans la direction d'un vecteur normal à ξ. Ces enlacements sont calculés avec l'orientation de V qui rend ξ positive. Lorsque ξ est tendue, si $\chi(S)$ désigne la caractéristique de S, l'autoenlacement $l(\gamma)$ et l'invariant de Thurston-Bennequin $tb(\gamma)$ vérifient les inégalités de Bennequin [Be] :

$$l(\gamma) \leq -\chi(S) \ \text{ et } \ tb(\gamma) \leq -\chi(S).$$

Si S est une surface close orientée, munie d'une forme d'aire ω, et plongée dans une variété de contact (V, ξ), dont l'orientation est donnée par ξ, on appelle *feuilletage* *caractéristique* de S, noté ξS, le feuilletage intégral du champ de vecteurs Y donné par

$$i_Y\omega = \alpha|_{TS}$$

qui dirige $\xi \cap TS$. Ses singularités sont les points $x \in S$ où $\xi(x) = T_xS$.

Remarque 1. On insiste sur le fait que pour déterminer l'orientation du feuilletage caractéristique d'une surface S, on utilise une orientation de l'espace ambiant différente suivant que la structure de contact ξ considérée est positive ou négative. La divergence d'une singularité du feuilletage caractéristique sera donc toujours positive là où les orientations de la structure ξ et de TS coïncident, ce indépendemment du signe de ξ.

2.2 Paires

Soit V une variété de dimension trois orientée. On appelle *paire* de structures de contact la donnée d'une structure ξ_+ positive et d'une structure ξ_- négative.

Dans la suite, on ne considère que des structures ξ_+ et ξ_- coorientées (et donc orientées). On appelle *point de contact* entre ξ_+ et ξ_- un point $x \in V$ où $\xi_+(x) = \xi_-(x)$. Les points de contact sont de deux sortes : positifs si les coorientations de ξ_+ et ξ_- coïncident en x, et négatifs si elles sont opposées. Pour une paire (ξ_+, ξ_-), on note Δ_+ le lieu des contacts positifs, Δ_- le lieu des contacts négatifs et $\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$.

Soient α_+ et α_- des équations de ξ_+ et ξ_-, toujours supposées positives sur un vecteur normal direct a, respectivement, ξ_+ et ξ_-. Il existe un unique champ de vecteurs X inclus dans ξ_- et qui vérifie l'équation

$$i_X d\alpha_-|_{\xi_-} = \alpha_+|_{\xi_-}.$$

Il est lisse, nul le long de Δ et dirige $\xi_+ \cap \xi_-$ sur $V \setminus \Delta$. Sa divergence dans la direction de ξ_- pour la forme $d\alpha_-$ est bien définie et non nulle aux points où $\xi_+ = \xi_-$: $\mathcal{L}_X d\alpha_-|_{\xi_-} = d(i_X d\alpha_-)|_{\xi_-} = d\alpha_+|_{\xi_+}$. En un point de Δ_+ (resp. Δ_-), la divergence de X dans la direction de $\xi_\pm$ est positive (resp. négative).

On note $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ le disque unité de $\mathbb{R}^2$. Une paire (ξ_+, ξ_-), définie sur une variété close (compacte sans bord) V, sera dite *normale* si l'ensemble Δ est un entrelacs lisse plongé dans V, transversal à $\xi_\pm$ sauf en un nombre fini de points $(x_i)_{1\leq i\leq n}$, et qui vérifie les propriétés suivantes.

- Si a_i désigne un arc ouvert transversal à $\xi_\pm$ et délimité par x_i et x_{i+1} dans Δ, alors a_i possède un voisinage tubulaire $D^2 \times a_i$, $\{(0,0)\} \times a_i = a_i$, sur lequel $\xi_+ \cap \xi_- \subset TD^2 \times \{pt\}$ et le feuilletage caractéristique $\xi_+ D^2 \times \{pt\}$ est égal au feuilletage $\xi_- D^2 \times \{pt\}$ (égalité dans Δ_+, égalité à orientation près dans Δ_-) et est un feuilletage de $D^2 \times \{pt\}$ par des selles ou par des foyers radiaux.
- La sous-variété Δ a un contact quadratique avec $\xi_\pm$ en les x_i, et x_i possède un voisinage $D^2 \times [-1,1]$, $x_i = (0,0,0)$, où $\xi_+ \cap \xi_- = \xi_+ \cap TD^2 \times \{t\} = \xi_- \cap TD^2 \times \{t\}$, et où le feuilletage caractéristique de $\xi_+ D^2 \times \{t\} = \xi_- D^2 \times \{t\}$, pour $t \in [-1,1]$, est le film d'une élimination entre un foyer et une selle. En particulier, le feuilletage de $D^2 \times \{0\}$ possède une singularité de type naissance-mort en $(0,0,0) = x_i$. Dans ces coordonnées, le champ de vecteurs X est tangent au champ de droites $\{dt = dy = 0\}$ sur $\{y = 0\} \times [-1,1]$ (l'élimination se fait le long de ces caractéristiques).

On montre que toute paire se laisse déformer en une paire normale.

Proposition 2.1. *Sur une variété close V, pour toute paire (ξ_+, ξ_-) il existe une paire normale (ξ'_+, ξ'_-) où $\xi'_\pm$ est isotope à $\xi_\pm$.*

Démonstration. On fixe une trivialisation de TV, ainsi qu'une métrique sur V. La donnée de ξ_+ et ξ_- est la donnée de deux applications $f_\pm : V \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$. La condition de contact est ouverte pour la topologie C^1, et même, d'après le théorème de Gray, deux applications f et g qui sont C^1-proches donnent des structures de contact isotopes. On peut donc, quitte à perturber ξ_+ par isotopie, se placer dans la situation générique (*) où l'application $F : V \to S^2 \times S^2$, $F(x) = (f_+(x), f_-(x))$, est transversale à la diagonale et à l'antidiagonale de $S^2 \times S^2$. Sous cette hypothèse, Δ_+ et Δ_- sont des sous-variétés de dimension 1 de V, et le long de Δ la différentielle de X est de rang 2. On suppose également vérifiée la propriété générique : les points où Δ_+ et Δ_- sont tangents à $\xi_\pm$ sont des contacts quadratiques et donc isolés. Les composantes de $\Delta \setminus (\cup_{1\leq i\leq n} x_i)$ sont de deux types suivant le signe du déterminant de la différentielle de X dans la direction normale : *branches de foyers* si ce déterminant est positif et *branches de selles* s'il est négatif.

On suppose que Δ_+ a des contacts quadratiques avec $\xi_\pm$; dans le cas contraire, l'étude se simplifie. Un voisinage $N(\Delta_+)$ de Δ_+ est dit *normal* s'il est constitué des éléments suivants :

- un voisinage $N(x_i)$ de chaque point de contact quadratique x_i, $i = 1, \ldots, n$, de la forme $N(x_i) = \{|x| \leq z_0, |y| \leq \sqrt{z_0} + z_0, |z| \leq z_0\}$, où $z_0 > 0$ et $\xi_\pm(x_i) = \ker dz$. Le champ de vecteurs X est transversal aux faces *verticales* $\{|x| = z_0\}$ et $\{|y| = \sqrt{z_0} + z_0\}$. Il est *horizontal* (i.e. inclus dans $\ker dz$) et sort de $N(x_i)$ le long de ces faces verticales, sauf le long de la face $\{y = \sqrt{z_0} + z_0\}$ où il rentre dans $N(x_i)$. Pour tout $c \in [-z_0, z_0]$, l'arc $\{|x| = z_0, z = c\} \cup \{y = -\sqrt{z_0} - z_0, z = c\}$ (orienté comme bord du disque horizontal, lui-même coorienté par ∂_z, $\{z = c\}$) est positivement transversal à ξ_+ et, sauf aux deux points $\{x = \pm z_0, y = 0, z = -z_0\}$, son intérieur est négativement transversal à ξ_-. L'arc $\{y = \sqrt{z_0} + z_0, z = c\}$ est négativement transversal à ξ_+ et tangent à ξ_-. En particulier, du fait que X y est horizontal, ξ_- a pour équation $dz = 0$ le long de cet arc. La structure ξ_- est également d'équation $dz = 0$ le long de l'arc $\{y = 0, z = -z_0\}$, tandis que ξ_+ lui est transversal. Pour finir, le champ X dirige le feuilletage caractéristique de la face supérieure $\{z = z_0\}$ pour ξ_+ et ξ_- (seulement en dehors de l'arc $\{y = \sqrt{z_0} + z_0\}$ pour cette dernière, qui est, d'après ce qui précède, une ligne de singularités de $\xi_-\{z = z_0\}$).
- un voisinage tubulaire $N = \cup_{1\leq j\leq n} N_j$ de la collection d'arcs $\Delta_+ \setminus \cup_{1\leq i\leq n} \operatorname{Int}(N(x_i))$, où les voisinages $N_j \simeq [-1, 1] \times [-1, 1] \times [0, m]$ sont deux à deux disjoints. Chaque N_j est muni de coordonnées (x, y, z) avec $\Delta_+ \cap N_j = (0, 0) \times [0, m]$. Il intersecte $N(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, le long du disque $\{-z_0 - \sqrt{z_0} \leq y \leq 0, z = -z_0\} \subset N(x_i)$, du disque $\{0 \leq y \leq \sqrt{z_0} + z_0\} \subset N(x_i)$, ou de l'ensemble vide. S'il s'agit du voisinage d'une branche de foyers, il est feuilleté par des disques horizontaux $\{z = c\}$ dont les bords sont positivement transversaux à ξ_+ et négativement transversaux à ξ_- (le champ de vecteurs X est horizontal et sortant le long du bord), sauf en $\{z = 0\}$ et $\{z = m\}$ où une arête est tangente à ξ_-. S'il s'agit du voisinage d'une branche de selles, le champ X est horizontal et rentrant le long des faces verticales $\{|y| = 1\}$, et horizontal et sortant le long des faces verticales $\{|x| = 1\}$. La structure ξ_+ est négativement transversale aux arcs $\{|y| = 1, z = c\}$, tandis que ξ_- leur est tangente, et positivement transversale aux arcs $\{|x| = 1, z = c\}$, tandis que ξ_- est négativement transversale à leur intérieur.

En renversant le sens de X, on définit de façon similaire une notion de voisinage normal pour Δ_-.

Lemme 2.2. *Si* (ξ_+, ξ_-) *est une paire de structures de contact générique pour laquelle* Δ *est une sous-variété de dimension* 1 *qui a des contacts quadratiques avec* $\xi_\pm$*, alors* Δ

possède un voisinage normal.

Démonstration. On explique comment trouver un voisinage normal de Δ_+. L'étude pour Δ_- est similaire.

Soit p un point de contact quadratique entre Δ_+ et $\xi_\pm$. On prend un voisinage $U_0 \subset \mathbb{R}^3$ de $p = (0,0,0)$, muni de ses coordonnées cartésiennes (x, y, z), pour lequel $\xi_\pm(p) = \{dz = 0\}$. Par commodité, on se référera à la coordonnée z comme à la direction *verticale*, et aux coordonnées x et y comme aux directions *horizontales*. Soit X le champ de vecteurs lisse, qui dirige $\xi_+ \cap \xi_-$ en dehors de Δ et nul sur Δ, défini par l'équation $i_X d\alpha_-|_{\xi_-} = \alpha_+|_{\xi_-}$. On écrit le développement de X à l'ordre 1 au voisinage de $(0,0,0)$: $X = X_1 + o(\|(x,y,z)\|)$. Comme X est dans ξ_+, il vérifie une équation $dz = f dx + g dy$, avec $f(0,0,z) = g(0,0,z) = 0$. En particulier, X_1 est horizontal : $X_1 = (a_0x + b_0y + c_0z)\partial_x + (a_1x + b_1y + c_1z)\partial_y$. Comme le rang de DX_1 en p est 2, on obtient, après un changement de variables dans T_pV qui donne une forme réduite de Jordan à D_pX, que X_1 est du type $X_1 = ax\partial_x + bz\partial_y$. Une fois choisi $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ dans T_pV, on étend ce repère par de nouvelles coordonnées (x, y, z) de sorte que $\Delta_+ = \{z = -y^2, x = 0\}$ et $\xi_- = dz - xdy$ près de p.

Le développement de X à un ordre supérieur est, dans ces coordonnées :

$$X = (x(R_1(x,y,z) + (z+y^2)R_2(x,y,z))\partial_x + ((z+y^2)R_3(x,y,z) + xR_4(x,y,z))\partial_y +$$

$$(bx(z+y^2) + x^2R_4(x,y,z))\partial_z + o(\|(x,y,z)\|^2)$$

où :

- R_1, R_2, R_3 et R_4 sont d'ordre 1 ;
- R_1 et R_3 ont un terme constant non nul (resp. a et b), à l'inverse de R_2 et R_4 ;
- les termes d'ordre 3 provenant de y^2R_2 et y^2R_3 sont ceux apparaissant dans le développement de X à l'ordre 3.

Pour fixer les idées, on se place dans le cas où $b > 0$, ce qui signifie que Δ_+ se situe dans la zone $z \leq 0$.

On considère alors le voisinage U de p donné par $\{|x| \leq z_0, |y| \leq \sqrt{z_0} + z_0, |z| \leq z_0\}$, où $z_0 > 0$ est choisi assez petit.

Dans l'écriture de la coordonnée de X sur ∂_x, les termes en z^2, yz et y^3 sont toujours au maximum de l'ordre de $(z_0)^{1/2+1}$, c'est-à-dire négligeables devant z_0. De même, lorsque $|y| = \sqrt{z_0} + z_0$, $z + y^2$ est toujours supérieur à un $O(z_0)$; c'est donc le terme dominant dans le coefficient de ∂_y. On vérifie ainsi que pour z_0 assez petit, X est transversal aux faces verticales $|x| = z_0$ et $|y| = \sqrt{z_0} + z_0$. Il sort de U le long de $|x| = z_0$ car $a > 0$ (c'est la divergence de X dans $\xi_-(p)$), sort de U le long de $y = -(\sqrt{z_0} + z_0)$ et rentre dans U le long de $y = \sqrt{z_0} + z_0$.

Lorsque le voisinage U est assez petit (z_0 est assez petit), $R_3(x,y,z)$ vaut environ b. De plus, comme la composante sur ∂_z est environ $bx(z+y^2)$, toute orbite partant dans U de l'altitude z_0 rencontre une des faces verticales (ou plutôt leur prolongement dans la direction des z) à une altitude supérieure à $z_0 - O(z_0\sqrt{z_0})$. Pour z_0 assez petit, une telle orbite sort à une altitude positive proche de z_0. On prend dans la face $\{y = \sqrt{z_0} + z_0\}$ l'arc $A = \{z = \frac{3}{4}z_0\}$. Il est transversal (positivement) à ξ_+ et tangent à ξ_-. On considère la surface constituée de la réunion des orbites de X passant par A. De son intersection avec U, on ne garde que la composante qui contient A. La discussion effectuée plus haut assure que celle-ci est compacte, a son bord dans les faces verticales, est parallèle à la face $\{z = z_0\}$ et est contenue dans la région $z > 0$. De plus, son feuilletage caractéristique pour ξ_+ et ξ_- est dirigé par X (en dehors de l'arc A). Elle découpe U en deux composantes. On nomme U' celle qui contient p. Remplacer U par U' revient à remplacer la face horizontale $\{z = z_0\}$ par une face dont le feuilletage caractéristique pour ξ_+ et ξ_- est dirigé par X.

On change la structure produit de U' pour obtenir les propriétés de tangence et de transversalité des cercles horizontaux $\partial U' \cap \{z = c\}$ par rapport à ξ_+ et ξ_-. Pour cela, on utilise le fait que l'holonomie de ξ_+ autour du bord vertical de U' est positive, tandis qu'elle est négative pour ξ_-. Ici l'holonomie de $\xi_\pm$ est définie comme l'application de premier retour du feuilletage caractéristique $\xi_\pm \partial U'$ sur une arête verticale, par exemple $\{x = -z_0, y = \sqrt{z_0} + z_0\}$. Elle est positive (resp. négative ou nulle) quand l'orbite issue d'un point q revient à une altitude z supérieure (resp. inférieure ou égale) à celle de q.

Si on suit le feuilletage caractéristique de ξ_- le long de la face verticale $\{y = z_0 + \sqrt{z_0}\}$, puis le feuilletage de ξ_+ le long des autres faces verticales, on obtient une holonomie encore supérieure à celle obtenue en suivant toujours le feuilletage caractéristique de ξ_+ (car X rentre dans U' le long de $\{y = z_0 + \sqrt{z_0}\}$ et sort de U' le long des autres faces verticales). À l'inverse, si on suit le feuilletage de ξ_-, on obtient une holonomie négative. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on est assuré d'obtenir une holonomie nulle, c'est-à-dire un feuilletage par cercles, en suivant le feuilletage de ξ_- sur la face $\{y = z_0 + \sqrt{z_0}\}$ et en suivant une certaine trajectoire restant dans le cône délimité par ξ_+ et ξ_- le long des autres faces verticales. On change les coordonnées pour que ces cercles deviennent les bords des disques horizontaux. En particulier, on change ainsi la face horizontale inférieure de U', en la faisant s'appuyer sur un des cercles décrit plus haut. L'argument développé ci-dessus permet également de s'assurer que, après reparamétrisation, la structure ξ_- soit d'équation $dz = 0$ le long de l'arc $\{y = 0, z = -z_0\}$. Le voisinage obtenu est $N(x_i)$.

Soit maintenant p un point de Δ_+ où Δ_+ est transversal à $\xi_\pm$. Un voisinage de p s'envoie sur $\mathbb{R}^3$ muni de coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans lesquelles

$$p = (0,0,0), \ \ \Delta_+ = \{x = y = 0\} \ \text{ et } \ \xi_\pm(0,0,0) = \{dz = 0\}.$$

On écrit à nouveau le développement de X à l'ordre 1 au voisinage de $(0, 0, 0)$. Cette fois, on obtient que $X_1 = (a_0 x + b_0 y)\partial_x + (a_1 x + b_1 y)\partial_y$. On est toujours dans la situation générique où la différentielle de X, et donc de X_1, est de rang 2 en p, c'est-à-dire que $a_0 b_1 - a_1 b_0 \neq 0$. Suivant le signe de ce déterminant, on est en présence d'une branche de foyers ou de selles. On trouve facilement un voisinage N de cette branche avec les propriétés recherchées (voir la discussion du cas des voisinages $N(x_i)$ ci-dessus pour la mise en bonne position de ξ_+ et ξ_- par rapport au bord des disques horizontaux).

Enfin, on peut vérifier qu'il est possible d'ajuster les choix de $U' = N(x_i)$ et de N afin qu'ils s'intersectent comme dans la définition de voisinage normal. La raison en est à nouveau que dans les voisinages U, la coordonnée de X sur ∂_z est majorée par le produit de z_0 par la coordonnée de X sur ∂_y, ce qui permet de considérer le vecteur X comme horizontal et d'interpoler entre $N(x_i)$ et N dans le voisinage U. Les détails sont laissés au lecteur. □

La preuve de la proposition 2.1 se conclut en appliquant le lemme 2.3 ci-dessous. □

Lemme 2.3. *Si le lieu des contacts Δ d'une paire (ξ_+, ξ_-) possède un voisinage normal, alors (ξ_+, ξ_-) se laisse déformer en une paire normale.*

Démonstration. On considère un voisinage normal $N(\Delta)$ de Δ. Il s'agit de modifier ξ_+ et ξ_- dans $N(\Delta)$ pour obtenir une paire normale. Dans la suite, on se concentre sur un voisinage de Δ_+. La construction au voisinage de Δ_- est similaire.

Le lemme d'élimination des singularités de [Gi1] permet de déformer ξ_+ relativement à $V \setminus \mathrm{Int}(N(\Delta))$ pour que :

– si N_j, $j = 1, \dots n$, est le voisinage d'une branche de foyers (resp. de selles), la structure ξ_+ trace un foyer radial (resp. une selle) sur chaque disque horizontal de N_j ;
– sur chaque voisinage $N(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, la structure ξ_+ trace sur le feuilletage par disques horizontaux de $N(x_i)$ le film d'une élimination, l'élimination se faisant le long des caractéristiques $\{x = 0, z = c\}$, $c \in [-z_0, z_0]$.

La deuxième étape est de remplacer ξ_- à l'intérieur de $N(\Delta)$ par une structure de contact négative ξ'_- qui trace sur l'intérieur des disques horizontaux de $N(\Delta)$ le même feuilletage que ξ_+.

On commence par étendre $\xi_-|_{V \setminus \mathrm{Int}\, N(\Delta)}$ aux voisinages N_j qui sont des branches de selles. Sur $N_j = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [0, m]$, le feuilletage caractéristique $\xi_+\{z = c\}$ du disque horizontal $[-1, 1] \times [-1, 1] \times \{c\}$ est donné par le noyau d'une 1-forme β_c avec $d\beta_c|_{[-1,1]\times[-1,1]\times\{c\}} > 0$, qu'on peut supposer indépendante de c sur un voisinage U du bord vertical. On cherche à étendre ξ_- sur N_j par le noyau d'une équation du type

$$\alpha'_- = dz - f\beta_z = 0,$$

où $f : N_j \to \mathbb{R}$ est strictement positive sur $\mathrm{Int}(N_j)$ et vérifie les conditions imposées par ξ_- au bord. La condition de contact est donnée par :

$$(df \wedge \beta_z + f^2\beta_z \wedge \dot{\beta}_z + f d_h\beta_z) \wedge dz > 0,$$

où $\dot{\beta}_z$ est la dérivée de β_z par rapport à z et d_h est la différentielle dans la direction horizontale.

Le point clé est que, puisque ξ_- est tangente aux disques horizontaux $\{z = c\}$ le long des arcs $\{|y| = 1, z = c\}$, la fonction f est nulle le long de ces mêmes arcs. Elle peut donc être choisie arbitrairement petite et de différentielle nulle en dehors de U. Comme sa valeur est positive le long des arêtes $\{|x| = 1, z = c\}$, on peut également imposer à sa dérivée dans la direction du feuilletage caractéristique de ξ_+ d'être positive. Pour un tel choix de fonction f, la forme α'_- est de contact : en dehors de U, df est nulle et f^2 est négligeable devant f, donc $(df \wedge \beta_z + f^2\dot{\beta}_z \wedge \beta_z + f d_h\beta_z) \wedge dz$ est de l'ordre de $f d_h\beta_z \wedge dz > 0$. Dans U, $\dot{\beta}_z = 0$ et $df \wedge \beta_z \wedge dz > 0$, tout comme $f d_h\beta_z \wedge dz > 0$. L'inégalité de contact est donc encore satisfaite.

On s'occupe ensuite de la partie N_f de N qui est un voisinage des branches de foyers. Une petite difficulté technique apparaît : les bords des disques $[-1, 1] \times [-1, 1] \times \{0\}$ et $[-1, 1] \times [-1, 1] \times \{m\}$ ont une arête legendrienne pour ξ_-. On commence donc par élargir N_f en N'_f pour que N'_f soit feuilleté par des disques dont les bords sont transversaux positivement à ξ_+ et négativement à ξ_- (et avec le bord vertical de N'_f transversal à X). On étend les coordonnées de N_f à N'_f pour que ξ_+ trace toujours un feuilletage radial sur chaque disque horizontal de N'_f. On remplace alors la structure ξ_- sur N'_f par une structure ξ'_- tangente aux feuilletages caractéristiques radiaux tracés par ξ_+, en la faisant pivoter de sa position initiale au bord jusqu'à la position horizontale, atteinte au centre.

Reste à étendre ξ_- dans les voisinages $N(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, des contacts quadratiques. Dans chacun des voisinages $N(x_i)$, le feuilletage caractéristique tracé par ξ_+ sur les disques horizontaux donne le film d'une élimination d'un foyer avec une selle. La remarque clé est, comme dans le cas des selles, qu'on peut alors étendre la restriction de ξ_- au bord vertical de $N(x_i)$ en une structure de contact qui trace sur l'intérieur de chacun des disques horizontaux le même feuilletage que ξ_+, et ce car ξ_- est tangente aux arcs $\{y = z_0 + \sqrt{z_0}, z = c\}$, $c \in [-z_0, z_0]$. Ce procédé fournit une première structure qui ne coïncide pas nécessairement avec ξ_- le long des faces horizontales $\{z = \pm z_0\}$. Pour obtenir une structure qui étend ξ_-, on interpole entre cette première extension, d'équation $dz + \beta_z = 0$, et ξ_-, d'équation $dz + \delta_z = 0$ (β_z et δ_z ont même noyau dans $\mathrm{Int}(N(x_i))$), dans un voisinage de $\{z = \pm z_0\}$. On obtient un champ de plans avec une équation du type $dz + \chi(z)\beta_z + (1 - \chi(z))\delta_z = 0$, où χ est une fonction de coupure, qui est une extension de ξ_- et qui va automatiquement être de contact.

Pour finir, on vérifie que la structure ξ'_- produite est isotope à la structure initiale ξ_-. Pour cela, on observe par exemple que les structures ξ_- et ξ'_- sont tendues sur $N(\Delta)$ (car « horizontales »). La structure ξ'_- est égale à ξ_- le long de $\partial N(\Delta)$ et toutes deux possèdent un cercle méridien transversal et d'autoenlacement -1. L'isotopie est alors donnée par un avatar du théorème de classification d'Eliashberg [El] (il est également possible ici de trouver une isotopie explicite par des arguments élémentaires). □

Remarque 2. La perturbation d'une paire générique (ξ_+, ξ_-) en une paire normale (ξ'_+, ξ'_-) peut être réalisée en fixant Δ.

Soit (ξ_+, ξ_-) une paire de structures de contact normale. On note toujours X un champ de vecteurs lisse, nul sur Δ et qui dirige le champ de droites orientées $\xi_+ \cap \xi_-$ sur $V \setminus \Delta$. Comme dans [ET], on peut alors définir quatre champs de plans $\lambda_\pm^{\pm\infty}$ en posant, pour $x \in V \setminus \Delta$:

$$\lambda_\pm^{\pm\infty}(x) = \lim_{t\to\pm\infty} X_*^t(X^{-t}(x))\xi_\pm(X^{-t}(x)).$$

Ici, X^t désigne le flot de X à l'instant t. On pose de plus, pour $x \in \Delta_+$,

$$\lambda_\pm^{+\infty}(x) = \xi_+(x) = \xi_-(x),$$

et pour $x \in \Delta_-$,

$$\lambda_\pm^{-\infty}(x) = \xi_+(x) = \xi_-(x).$$

Proposition 2.4. *Si V est close, si (ξ_+, ξ_-) est une paire normale de structures de contact sur V et si Δ_- est transversale à ξ_+ (s'il n'y a pas de contact quadratique le long de Δ_-), alors $\lambda_+^{+\infty} = \lambda_-^{+\infty} =: \lambda^{+\infty}$ sur $V \setminus \Delta_-$.*

Démonstration. On reprend les notations de [ET]. On fixe une métrique g sur V et on note ν le champ de plans orthogonal à X sur $V \setminus \Delta$. On pose $\lambda_\pm = \xi_\pm \cap \nu$, et, pour $t \in \mathbb{R}$ et $x \in V \setminus \Delta$,

$$\lambda_\pm^t(x) = X_*^t(X^{-t}(x))\xi_\pm(X^{-t}(x)) \cap \nu(x).$$

On notera de la même façon la droite $\lambda_\pm^t(x)$ et le plan contenant cette droite et le vecteur X. Si $\theta_\pm^t(x)$ désigne l'angle (calculé avec g) entre $\lambda_\pm^t(x)$ et $\lambda_\pm(x)$, les conditions de contact imposent :

$$\frac{d\theta_+^t(x)}{dt} > 0 \text{ et } \frac{d\theta_-^t(x)}{dt} < 0.$$

Ces conditions, plus le fait que les fonctions $\theta_\pm^t(x)$ soient bornées (à x fixé, et indépendemment de t), suffisent pour assurer l'existence de limites quand t tend vers $\pm\infty$. Il est alors automatique que les plans limites $\lambda_\pm^{\pm\infty}$ sont invariants par le flot de X.

On traite le cas où t tend vers $+\infty$. On note O l'orbite de X qui passe par un point $x \in V \setminus \Delta$. Pour prouver la proposition 2.4 dans cette situation, on distingue six cas. Les deux premiers sont essentiellement traités dans [ET]. Pour le confort du lecteur, on reproduit tout de même la preuve de ces deux cas spéciaux. La preuve proposée pour le cas 2 tient compte du fait qu'ici, contrairement à [ET], l'espace $V \setminus \Delta$ n'est pas compact. Comme la paire considérée est normale, soit l'orbite O a une limite $x_{-\infty}$ dans Δ lorsque

t tend vers $-\infty$, soit elle a un point d'accumulation en temps négatif dans $V \setminus \Delta$.

Cas 1. O est une orbite périodique.

On note $L : \nu \to \nu$ la différentielle de l'application de premier retour du flot de X en x. Les plans $\lambda_\pm^{+\infty}(x)$ et $\lambda_\pm^{-\infty}(x)$ sont distincts et invariants par le flot de X. Si $\lambda_-^{+\infty} \neq \lambda_+^{+\infty}$, l'application linéaire L a au moins trois directions propres distinctes et se trouve donc être une homothétie. Ceci contredit le fait que les directions $\lambda_\pm$ de $\xi_\pm$ ne sont pas laissées invariantes par L. On peut également argumenter de la façon suivante, ce qui sera utile pour l'étude du cas 2. Les directions $\lambda_\pm^{+\infty}(x)$ sont des directions propres de L et les droites $\lambda_\pm(x)$ sont situées dans un même secteur de $\nu \setminus (\lambda_+^{+\infty}(x) \cup \lambda_-^{+\infty}(x))$. Comme telles, ces dernières doivent être tournées dans le même sens par l'application linéaire L, ce qui n'est pas le cas, puisque $\frac{d\theta_+^t(x)}{dt} > 0$ et $\frac{d\theta_-^t(x)}{dt} < 0$.

Cas 2. O a une valeur d'adhérence en temps négatif dans $V \setminus \Delta$.

Dans ce cas, on fait fonctionner une version quantitative du cas 1). On suppose que $\lambda_+^{+\infty}(x) \neq \lambda_-^{+\infty}(x)$. Soit $x_\infty \in V \setminus \Delta$ la limite d'une suite $x_n = X^{t_n}(x)$ de points de O, avec $t_n \to -\infty$. Il existe $\alpha > 0$ tel que, si t est assez grand, $\theta_+^t(x_\infty) \geq \alpha$ et $\theta_-^t(x_\infty) \leq -\alpha$. On en déduit qu'il existe $\alpha > 0$, un voisinage U de x_∞ et $T > 0$, tels que pour tout $p \in U$ et pour tout $t \geq T$, $|\theta_\pm^t(p)| > \alpha$. Quitte à prendre n assez grand, on suppose que tous les x_n sont dans U. On identifie U à $\mathbb{R}^3$, en rendant ν tangent à $T(\{*\} \times \mathbb{R}^2)$ et X colinéaire à $\mathbb{R} \times (*, *)$, si bien qu'on identifie tous les plans de ν par translation.

On suppose pour l'instant qu'on peut trouver une suite $(x_{\phi(n)})$ extraite de x_n telle que $\lambda_+^{+\infty}(x_{\phi(n)})$ et $\lambda_-^{+\infty}(x_{\phi(n)})$ aient pour limites respectives μ_+ et μ_-, lorsque n tend vers $+\infty$, avec $\mu_+ \neq \mu_-$. Si n et p sont assez grands avec $n < p$, il existe dans ce cas une application linéaire $A_{n,p} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui est ϵ-proche de l'identité ($\epsilon \ll \alpha$) et qui envoie $\lambda_\pm^{+\infty}(x_{\phi(p)})$ sur $\lambda_\pm^{+\infty}(x_{\phi(n)})$. Mais alors, dès que $t_{\phi(n)} - t_{\phi(p)} > T$, la composée de A avec la différentielle $X_*^{t_{\phi(p)} - t_{\phi(n)}}(x_{\phi(n)})$ a $\lambda_\pm^{+\infty}(x_{\phi(n)})$ comme espaces propres, et fait tourner les deux droites $\lambda_\pm(x_{\phi(n)})$, situées dans la même composante de $\mathbb{R}^2 \setminus (\lambda_+^{+\infty}(x_{\phi(n)}) \cup \lambda_-^{+\infty}(x_{\phi(n)}))$, dans des sens opposés (car $\epsilon \ll \alpha$), ce qui est impossible.

Il reste à étudier le cas où $\mu_+ = \mu_-$. Cette fois, on peut trouver $n < p$ pour que les points $x_{\phi(n)}$ et $x_{\phi(p)}$ soient dans U et que l'angle formé par les droites $\lambda_+^{+\infty}(x_{\phi(p)})$ et $\lambda_-^{+\infty}(x_{\phi(p)})$ soit très petit (quitte à prendre p assez grand) devant l'angle formé par $\lambda_+^{+\infty}(x_{\phi(n)})$ et $\lambda_-^{+\infty}(x_{\phi(n)})$. On peut alors trouver une application linéaire (pas proche de l'identité) $A_{n,p}$ qui envoie les deux droites $\lambda_\pm^{+\infty}(x_{\phi(p)})$ sur $\lambda_\pm^{+\infty}(x_{\phi(n)})$ et qui « écarte » les droites $\lambda_\pm(x_{\phi(p)})$: les droites $\lambda_\pm(x_{\phi(n)})$ sont dans un même secteur de

$$\mathbb{R}^2 \setminus (A_{n,p}\lambda_+(x_{\phi(p)}) \cup A_{n,p}\lambda_-(x_{\phi(p)})).$$

Par les conditions de contact, le secteur angulaire délimité par les droites $\lambda_+(x_{\phi(n)})$ et $\lambda_-(x_{\phi(n)})$ est envoyé par la différentielle $X_*^{t_{\phi(p)} - t_{\phi(n)}}(x_{\phi(n)})$ sur un secteur contenant les droites $\lambda_\pm(x_{\phi(p)})$. La composition de $A_{n,p}$ avec la différentielle $X_*^{t_{\phi(p)} - t_{\phi(n)}}(x_{\phi(n)})$ a $\lambda_\pm^{+\infty}(x_{\phi(n)})$ comme espaces propres et fait comme précédemment tourner les droites $\lambda_\pm(x_{\phi(n)})$ en sens opposés. C'est la contradiction recherchée.

Cas 3. O provient d'un foyer de Δ_+.

Dans ce cas, on peut modéliser un voisinage du foyer e en question par

$$\mathbb{R}^3 = \{(r, \theta, z) \in]0, \epsilon] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [-1, 1]\},$$

$\xi_+ = \{dz - f(r^2,\theta,z)d\theta = 0\}$, $f(0,\theta,z) = 0$ et $\xi_- = \{dz - g(r^2,\theta,z)d\theta = 0\}$, $g(0,\theta,z) = 0$. On vérifie alors que dans ces coordonnées, $\lambda_{\pm}^{+\infty}(r,\theta,z) = \{dz = 0\}$. Cette égalité, obtenue explicitement au voisinage de e, se propage en x par le flot de X (de même que la différentiabilité de ce champ de plans limite).

Cas 4. O est la séparatrice instable d'une selle de γ_+.

On utilise un modèle comme dans le cas 3, qui montre que le long de la séparatrice instable, au voisinage de la selle h, les plans limites $\lambda_{\pm}^{+\infty}$ coïncident avec le plan tangent au feuilletage par disques qui contient X. Précisemment, si on conjugue un voisinage de h à sa linéarisation, on obtient, dans des coordonnées $(a,b,c) \in D^2 \times [-\epsilon,\epsilon]$, que le flot de X est $X^t(a,b,c) = (a\exp(\mu_+ t), b\exp(\mu_- t), c)$. Dans ce modèle, $\mu_+ > -\mu_- > 0$ car h est à divergence positive et x est sur la séparatrice s qui est $\{a > 0, b = c = 0\}$ près de h. Les plans de contact ξ_+ et ξ_- ont quant à eux pour équations le long de s respectivement $dc + \alpha a db = 0$ et $dc - \beta a db = 0$. On calcule alors que $X_*^t(X^{-t}(a,0,0))\xi_+(X^{-t}(a,0,0))$ est d'équation $dc + \alpha\exp((-\mu_+ - \mu_-)t)db = 0$. Lorsque t tend vers l'infini la limite est bien $\{dc = 0\}$. On aboutit au même résultat pour ξ_-.

Comme dans le cas précédent, l'égalité $\lambda_+^{+\infty} = \lambda_-^{+\infty}$ se prolonge en x par le flot de X.

Cas 5. O est la séparatrice instable d'une selle de Δ_-.

Dans ce cas, $\lambda_{\pm}^{+\infty}$ est le plan tangent à la réunion des variétés instables issues de Δ_-. On démontre ce fait en reprenant le modèle local du cas 4), avec cette fois $-\mu_- > \mu_+ > 0$.

Cas 6. O provient d'une naissance-mort de Δ_+.

Si O provient de Δ_+, et de l'intérieur de la partie foyer de la naissance-mort, le plan $\lambda_{\pm}^{+\infty}$ est à nouveau, au voisinage de la singularité, le plan tangent au feuilletage en disques, donné par la forme normale, qui contient X. Un germe de feuille intégrale passant par x est en particulier lisse, comme dans le cas des foyers. Si O est l'une des deux orbites bord de la partie foyer, l'écriture d'un modèle local fournit également l'égalité recherchée. □

Proposition 2.5. *Si (ξ_+,ξ_-) est une paire normale sur une variété close V et si Δ_- est transversal à ξ_+, alors le champ de plans $\lambda^{+\infty}$ est continu sur $V \setminus \Delta_-$, invariant par le flot de X et localement intégrable. Lorsque de plus Δ_+ est transversal à ξ_+, alors les deux champs de plans $\lambda^{+\infty}$ et $\lambda^{-\infty}$ (défini de façon similaire à $\lambda^{+\infty}$) sont transversaux en dehors de Δ.*

En particulier par tout point où $\lambda^{\pm\infty}$ est défini passe un germe de variété intégrale. Ce germe n'est pas forcément unique, et $\lambda^{\pm\infty}$ ne possède pas forcément de feuilletage intégral global.

Démonstration. On montre que $\lambda^{+\infty}$ est continu sur $V \setminus \Delta_-$. On note $\theta'^t_+(x) = \theta^t_+(x)$, $\theta'^t_-(x)$ l'angle entre $\lambda^t_-(x)$ et $\lambda_+(x)$, et θ'^∞ la limite commune de θ'^t_+ et θ'^t_- quand t tend vers $+\infty$. Comme $\theta^t_-(x)$, la fonction $\theta'^t_-(x)$ est une fonction décroissante de t.

Soit $\epsilon > 0$ et $x \in V \setminus \Delta$. Il existe t_0 tel que, pour $t \geq t_0$,

$$\theta'^\infty(x) - \epsilon < \theta'^t_-(x) < \theta'^t_+(x) < \theta'^\infty(x) + \epsilon$$

(pour des relèvements convenablement choisis des angles θ' dans $\mathbb{R}$). Par continuité du flot de X par rapport à x, si y est assez proche de x, on a $|\theta'^{t_0}_\pm(y) - \theta'^{t_0}_\pm(x)| < \epsilon/2$. Mais alors, pour $t \geq t_0$, $\theta'^\infty(x) - 3\epsilon/2 < \theta'^{t_0}_-(y) < \theta'^t_-(y) < \theta'^\infty(y) < \theta'^t_+(y) < \theta'^{t_0}_+(y) < \theta'^\infty(x) + 3\epsilon/2$. On en déduit la continuité de θ'^∞, et donc de $\lambda^{+\infty}$, sur $V \setminus \Delta$.

On a également bien évidemment continuité aux points de Δ_+, car le plan $\lambda^{+\infty}$ est coincé entre ξ_+ et ξ_- qui tendent tous deux vers le même plan. C'est donc aussi le cas de $\lambda^{+\infty}$.

On montre maintenant que $\lambda^{+\infty}$ est localement intégrable : par tout point de $V \setminus \Delta_-$ passe un germe de surface intégrale.

Si $x \in V \setminus \Delta$, on se donne un germe de disque D centré en x et transversal à X. Le champ de plans $\lambda^{+\infty}$ intersecte le plan tangent à D en un champ de droites continu. Par le théorème de Cauchy-Péano, ce champ de droites admet un germe de courbe intégrale γ passant par x. Le germe de surface obtenu en poussant γ par le flot de X est tangent à $\lambda^{+\infty}$, puisque X est tangent à $\lambda^{+\infty}$ et que $\lambda^{+\infty}$ est invariant par le flot de X.

Si x est un foyer de Δ_+, le modèle local donné dans la preuve de la proposition 2.4 donne que $\lambda^{+\infty}$ est lisse et uniquement intégrable au voisinage de x (c'est le champ de plans horizontal).

Si x est une selle de Δ_+, on se replace dans les coordonnées de la proposition 2.4, où le flot de X au temps t dans un voisinage U de x est $(a, b, c) \to (a \exp(\mu_+ t), b \exp(\mu_- t), c)$, et $x = (0, 0, 0)$. On se donne deux germes de disques $D_1 \subset U$ et $D_2 \subset U$ transversaux à X et intersectant les deux séparatrices stables de x. On choisit ensuite à l'aide du théorème de Cauchy-Péano, pour $i = 1, 2$, des courbes intégrales $\gamma_i \subset U$ de $TD_i \cap \lambda^{+\infty}$ passant par ces séparatrices. On considère alors l'ensemble S des trajectoires de $X|_U$ issues de γ_1 et γ_2, augmenté des séparatrices instables de x dans U. On montre que S donne un germe de surface intégrale de $\lambda^{+\infty}$ près de X. Tout d'abord, S est le graphe d'une fonction f continue : $S = \{(a, b, f(a, b))\}$ près de x. Il est automatique que les ensembles S_1 et S_2 des trajectoires issues respectivement de γ_1 et γ_2 forment deux surfaces intégrales ouvertes de $\lambda^{+\infty}$. Il faut voir que ces deux surfaces se recollent le long des séparatrices instables de x pour former une surface intégrale globale. Pour cela, on utilise le modèle local : une orbite issue d'un point (a, b, ϵ) passe en $(a', b(\frac{a}{a'})^{-\frac{\mu_-}{\mu_+}}, \epsilon)$, avec $\frac{b}{a}(\frac{a}{a'})^{-\frac{\mu_-}{\mu_+}} \to +\infty$ quand $a \to 0$, car $0 < -\frac{\mu_-}{\mu_+} < 1$. Ceci permet de majorer le taux de variation de f en $(a', 0)$ par celui en un point $(0, b)$ où f est différentiable et de différentielle nulle. On obtient que f est différentiable de différentielle nulle en $(a', 0)$, ce qui confirme que S possède un plan tangent égal à $\lambda^{+\infty}$ le long des séparatrices instables de x.

On traite de manière similaire le cas où x est une naissance-mort : on a déjà une demi-surface intégrale du côté foyer, qui se recolle avec une surface intégrale ouverte saturée par X du côté selle, comme dans le sous-cas précédent (même si cette fois le modèle local ne donne pas une convergence vers $+\infty$, mais de façon suffisante un quotient de la deuxième coordonnée par a minoré par une constante > 0). $\square$

3 Paires positives de structures de contact

On suppose maintenant que $\Delta_- = \emptyset$. La paire de contact (ξ_+, ξ_-) est alors dite *positive*. On rappelle qu'on ne considère que des paires normales. Pour celles-ci, on s'intéresse au champ de plans $\lambda^{+\infty}$ qui est continu et défini sur tout V. On le note λ pour simplifier les notations. On possède de nombreux exemples de telles paires de structures de contact positives. Un cas important se trouve dans [ET] : tout feuilletage $\mathcal{F}$, différent du feuilletage en sphères de $S^1 \times S^2$, peut être approché par des structures de contact positives et négatives. Un tel couple de structures de contact proches de $\mathcal{F}$ est automatiquement positif et se laisse déformer en une paire normale et positive d'après la proposition 2.1.

On rappelle qu'un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension 1 sur une variété de dimension trois est *tendu* s'il possède une transversale qui coupe toutes ses feuilles. L'existence d'une telle transversale implique l'absence de *composante de Reeb.*

Lemme 3.1. *Si (ξ_+, ξ_-) est une paire normale et positive sur une variété close V, les champs de plans $\xi_\pm^t = X_*^t \xi_\pm$ convergent uniformément vers λ lorsque t tend vers $+\infty$.*

Démonstration. Les fonctions $\theta_\pm^t(x)$ sont monotones en t et convergent simplement vers une limite continue. Comme la variété V est compacte, cette convergence est uniforme d'après le théorème de Dini. □

Proposition 3.2. *Si (ξ_+, ξ_-) est une paire normale positive et si ξ_+ ou ξ_- est tendue, alors λ ne possède pas de sphère intégrale.*

Démonstration. Soit $e(\xi_\pm) \in H^2(V, \mathbb{Z})$ la classe d'Euler de $\xi_\pm$. Si S est une sphère intégrale de λ, alors le feuilletage caractéristique de S pour ξ_+ et ξ_- ne possède que des singularités positives. On en déduit que $e(\xi_\pm).[S] > 0$. Or pour une structure ξ tendue, on a $e(\xi).[S] = 0$ d'après [Be, El]. □

Remarque 3. Si S est une surface intégrale de λ, même si S n'est pas lisse, son feuilletage caractéristique est bien défini puisque dirigé par le champ de vecteurs lisse X.

Théorème 3.3. *Si (ξ_+, ξ_-) est une paire normale positive sur une variété close V, si ξ_+ et ξ_- sont tendues et si λ est uniquement intégrable, alors le feuilletage intégral $\mathcal{F}$ de λ ne possède pas de composante de Reeb d'âme homologue à zéro dans $H_1(V, \mathbb{Q})$. De plus, V porte un feuilletage sans composante de Reeb et en particulier son revêtement universel est $\mathbb{R}^3$.*

Remarque 4. Réciproquement, si λ a pour feuilletage intégral un feuilletage tendu $\mathcal{F}$, les structures $\xi_\pm$ sont tendues (et même *symplectiquement remplissables*), puisque isotopes à des structures proches de $\mathcal{F}$ (lemme 3.1) et donc soumises aux conclusions de [ET].

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage intégral de λ. On suppose que $\mathcal{F}$ contient une composante de Reeb, c'est-à-dire en particulier une feuille torique T qui borde un tore solide.

On se donne un méridien m tracé sur T et une bande B d'âme m, transversale à $\mathcal{F}$. La remarque clé est que si l'holonomie de $\mathcal{F}$ le long de m est non triviale (si son germe n'est pas l'identité), on peut tracer sur B une courbe plongée γ positivement transversale à $\mathcal{F}$ et isotope à m dans B. Le feuilletage tracé par $\mathcal{F}$ sur B n'étant que C^0, pour trouver cette transversale, on utilise ici de manière cruciale que le champ de droites continu $T\mathcal{F} \cap TB$ est uniquement intégrable, conjugué à un résultat classique de Kneser (voir par exemple le « théorème de Kneser » dans le livre [Har]). Cette courbe γ est le bord d'un disque plongé dans V.

Comme $\xi_\pm^t$ converge uniformément vers λ lorsque t tend vers $+\infty$, il existe t_0 tel que si $t \geq t_0$, les structures $\xi_\pm^t$ soient transversales à γ, positivement pour les deux. On en déduit une homotopie entre $\xi_+^{t_0}$ et $\xi_-^{t_0}$ parmi les champs de plans transversaux à γ. Elle est construite en concaténant le chemin entre $\xi_+^{t_0}$ et λ donné par les ξ_+^t, $t \geq t_0$, et le chemin entre λ et $\xi_-^{t_0}$ donné par les ξ_-^t, $t \geq t_0$.

Cette homotopie indique que les autoenlacements de γ pour les structures $\xi_+^{t_0}$ et $\xi_-^{t_0}$ sont opposés (les structures sont de signes opposés). On ne peut donc pas avoir pour les deux structures l'inégalité de Bennequin [Be] : $l(\gamma) \leq -1$. Une au moins des structures est vrillée. Par contradiction, l'holonomie de $\mathcal{F}$ le long de m est l'identité.

Soit à présent l une longitude tracée sur T. On montre que si $[l]$ est nulle dans $H_1(V, \mathbb{Q})$, alors le germe de l'holonomie de $\mathcal{F}$ le long de l est l'identité au moins d'un côté de T.

Si tel n'est pas le cas, même lorsque l n'est pas homologue à zéro, on peut trouver un petit voisinage tubulaire $T \times [-1,1]$ de T, $T = T \times \{0\}$, où les tores $T \times \{\pm 1\}$ sont transversaux à $\mathcal{F}$. Comme l'holonomie de $\mathcal{F}$ le long de m est l'identité, on a de plus que les feuilletages tracés par $\mathcal{F}$ sur $T \times \{\pm 1\}$ sont des feuilletages en cercles méridiens.

À ce stade, on peut utiliser le fait, dû à Haefliger [Ha], que l'union des feuilles compactes de $\mathcal{F}$ est un compact de V pour considérer les feuilles toriques maximales parmi celles qui bordent un tore solide (la maximalité se rapporte à l'inclusion des tores solides). D'après ce qui précède, un tel tore maximal est inclus dans un tore solide sur le bord duquel $\mathcal{F}$ trace un feuilletage par cercles méridiens. On peut remplacer $\mathcal{F}$ sur ce tore par un feuilletage en disques. Cette construction conduit à un feuilletage $\mathcal{F}'$ sans composante de Reeb.

Pour revenir à l'étude du feuilletage $\mathcal{F}$ dans le cas où $[l] = 0$, on note que, comme ξ_+^t converge uniformément vers $\mathcal{F}$, pour t assez grand, ξ_+^t est transversal à $T \times \{\pm 1\}$ et le feuilletage caractéristique $\xi_+^t T \times \{\pm 1\}$ est non singulier et arbitrairement proche d'un feuilletage par cercles méridiens. Le feuilletage caractéristique de T pour ξ_+^t est lui constant et dirigé par X. Il possède une certaine pente p (bien définie modulo π par le choix d'une longitude fixe l de T), différente de celle du méridien (qui vaudra par définition 0) car sinon on obtiendrait un disque vrillé. Cette pente est la pente de n'importe quelle courbe intégrale de son feuilletage caractéristique, car celui-ci ne possède que des singularités positives.

On note $p_+^{\pm 1,t}$ les pentes de $\xi_+^t T \times \{\pm 1\}$. Si t est assez grand, elles sont non nulles (car sinon ξ_+ serait vrillée), dépendent continûment de t et tendent vers 0 (modulo π) lorsque t tend vers $+\infty$. On peut alors également les supposer irrationnelles.

Si t est assez grand, les pentes $p_1^{1,t}$ et $p_1^{-1,t}$ sont proches de 0 et en particulier, elles délimitent un secteur angulaire de petite ouverture qui ne contient pas p. Si on parcourt le cercle dans le sens trigonométrique pour joindre $p_1^{1,t}$ à $p_1^{-1,t}$ en passant par p, on est alors assuré de traverser un intervalle $I(t)$ de taille minorée par $\pi - \epsilon(t)$, où $\epsilon(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

La restriction de ξ_+^t a $T \times [-1,1]$ est universellement tendue : proche de $\mathcal{F}$, elle est transversale à une fibration en intervalles de $T \times [-1,1]$; son rappel dans le revêtement universel de ce produit se plonge alors de manière explicite dans la structure de contact tendue standard de $\mathbb{R}^3$. D'après le théorème principal de [Gi2] qui classifie les structures de contact tendues sur le tore épais, pour chaque pente p' dans l'intervalle $I(t)$, il existe un tore $T_{p'}$ dans $T \times [-1,1]$, isotope à T et dont le feuilletage caractéristique pour ξ_+^t est non singulier et de pente p'. En particulier $I(t)$ ne contient pas 0 et π (modulo 2π), car sinon ξ_+^t, et donc ξ_+, serait vrillée. On note k l'ordre de l'âme de la composante de Reeb dans $H_1(V, \mathbb{Z})$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ premier avec k, si t est assez grand, toute courbe de pente $\frac{k}{n}$ est réalisée par une courbe non singulière $\gamma_{\frac{k}{n}}$ du feuilletage caractéristique pour ξ_+^t d'un tore $T_{\frac{k}{n}}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$ premier avec k. Pour tout $l \in \mathbb{Z}$, la courbe $\gamma_{\frac{k}{n+lk}}$ est obtenue comme image de $\gamma_{\frac{k}{n}}$ par la puissance l-ième d'un twist de Dehn autour du méridien. Comme courbe lisse, elle est isotope à $\gamma_{\frac{k}{l}}$. Elle borde donc une surface compacte et orientée de genre g indépendant de l. Son invariant de Thurston-Bennequin dépend affinement de l : la différence entre $tb(\gamma_{\frac{k}{n+lk}})$ et $tb(\gamma_{\frac{k}{n+(l+1)k}})$ vaut k, et donc l'inégalité de Bennequin

$$tb(\gamma_{\frac{k}{n+lk}}) \leq 2g - 1$$

sera violée pour un choix de l judicieux.

On en déduit par contradiction que l'holonomie est l'identité au moins d'un côté de T. Cette argument montre également que si $U \simeq T^2 \times [0,1]$ est une sous-variété de V feuilletée par des tores $(T^2 \times \{s\})_{s\in[0,1]}$ de $\mathcal{F}$, alors l'holonomie de $\mathcal{F}$ est l'identité près de $T^2 \times \{0\}$ ou de $T^2 \times \{1\}$. Comme on est parti d'un tore T bordant une composante de Reeb, et en particulier un tore solide, on en déduit que V est difféomorphe à $S^1 \times \mathbb{R}^2$, ce qui donne une contradiction. □

Remarque 5. Si (ξ_+, ξ_-) est une paire positive de structures de contact tendues, l'inégalité de Bennequin montre, même lorsque λ n'est pas uniquement intégrable, qu'aucune courbe transversale à λ n'est le bord d'un disque plongé dans V.

Sous les conditions du théorème 3.3, le feuilletage $\mathcal{F}$ peut-il posséder des composantes de Reeb ?

L'hypothèse de positivité faite sur la paire n'est pas très agréable à manipuler. On pourrait essayer de la remplacer par une condition d'homotopie : une paire de structures de contact (ξ_+, ξ_-) tendues qui sont homotopes comme champs de plans est-elle toujours déformable en une paire positive ? Autrement dit, si ξ_+ et ξ_- sont tendues et homotopes, peut-on toujours éliminer leurs contacts négatifs par une isotopie de ξ_+ ? Par ailleurs, il y a des paires positives de structures de contact, même transversales, pour lesquelles λ n'a pas de feuilletage intégral global [ET, Mi1, Mi2]. La notion de paire positive de structures de contact tendues semble généraliser strictement celle de feuilletage sans composante de Reeb. Quelles sont les variétés qui portent une telle paire ? Parmi celles-ci, y en a-t-il une qui ne porte pas de feuilletage sans composante de Reeb ?

Ces commentaires et le théorème 3.3 nous incitent à formuler la conjecture suivante.

Conjecture 1. Si V est une variété close qui porte une paire de structures tendues homotopes, alors le revêtement universel de V est conjugué à $\mathbb{R}^3$.

Pour ce qui concerne les structures de contact universellement tendues sur les variétés irréductibles, la preuve de cette conjecture résulte du fait que la sphère S^3 ainsi que le produit $S^2 \times \mathbb{R}$ ne portent pas de structures de contact tendues positives et négatives homotopes [El]. L'utilisation du théorème d'uniformisation démontré par Perelman [Pe] permet d'exclure toute autre possibilité que $\mathbb{R}^3$.

Soit V une variété compacte de bord non vide portant une paire positive (ξ_+, ξ_-). On dit que le bord de V est *adapté* à la paire (ξ_+, ξ_-) si $\Delta = \Delta_+$ est transversale à ∂V et si X est transversal à ∂V et sort de V en dehors des points de $\Delta \cap \partial V$. C'est par exemple le cas lorsque ∂V est composé de tores transversaux à X (et n'intersectant pas Δ) ou de sphères intersectant Δ en deux foyers, comme dans le théorème 4.1. Dans la situation où le bord de V est adapté à une paire positive (ξ_+, ξ_-), on obtient, comme dans le cas clos, l'existence d'un champ de plans $\lambda = \lambda^{+\infty}$, continu et localement intégrable. Les théorèmes précédents s'étendent ainsi sans difficulté aux variétés compactes dont le bord est adapté à une paire (ξ_+, ξ_-).

On donne maintenant un critère qui permet d'assurer que le champ de plans λ est uniquement intégrable. Une paire positive de structures de contact est dite *transitive* si, pour tout $x \in V$, il existe $x_{-\infty} \in \Delta_+$ tel que $X^t(x)$ converge vers $x_{-\infty}$ lorsque t tend vers $-\infty$. Cette définition présente surtout un intérêt dans le cas où V possède un bord non vide adapté à (ξ_+, ξ_-).

Théorème 3.4. *Soit V une variété compacte dont le bord est adapté à une paire normale et positive (ξ_+, ξ_-). Si la paire (ξ_+, ξ_-) est transitive et si le champ X possède la propriété générique de n'avoir ni liaison entre les séparatrices d'une naissance-mort et d'une selle,* *ni suite de deux connections consécutives entre selles, alors le champ de plans λ est uniquement intégrable.*

Démonstration. On observe que λ est uniquement intégrable en un point x de $V \setminus \Delta_+$ si et seulement si le champ de droites $\lambda \cap \nu$ est uniquement intégrable, où ν est le plan tangent à un germe de disque en x transversal à X. (Pour obtenir le feuilletage intégral de λ, on pousse celui de $\lambda \cap \nu$ par le flot de X.) Si un point x de V est dans le bassin d'attraction d'un foyer, on a vu dans la preuve de la proposition 2.4 que le champ de plans λ est C^∞ au voisinage de x et donc uniquement intégrable.

On suppose à présent que x est sur la séparatrice instable d'une selle h. Par hypothèse de généricité, on est sûr qu'au moins une des deux séparatrices stable de h provient d'un foyer e.

On étudie d'abord le cas où les deux séparatrices stables de h proviennent de foyers e et e'. On fixe un petit disque D passant par x et transversal à X. Si λ n'est pas uniquement intégrable en x, alors le champ de droites orientées $\lambda \cap TD$, dirigé par un vecteur Y, non plus. On peut donc trouver un petit arc γ inclus dans D et transversal à Y dont tous les points peuvent être obtenus en suivant Y à partir de x pendant un petit temps positif. Quitte à prendre γ assez proche de x, on obtient également que tous les points de γ proviennent de foyers proches de e situés sur une même branche de Δ_+ en suivant le flot de X. En particulier, λ est C^∞ au voisinage de γ et s'intègre uniquement sur un voisinage U de γ en un feuilletage en disques transversal à γ.

Si y et z sont deux points assez proches situés sur γ, ils doivent être dans le bassin d'attraction de deux foyers distincts e_0 et e_1 proches de e (et situés sur la même composante de Δ_+), sinon y et z seraient sur une même feuille du feuilletage intégral de $\lambda|_U$. De ces deux foyers sont issues les séparatrices stables de deux selles h_0 et h_1 proches de h (et situées sur la même composante de Δ_+). Mais alors les feuilles intégrales de λ passant par y et z, qui sont bien définies dans les bassins d'attractions de e_0 et e_1, sont asymptotes aux séparatrices instables de h_0 et de h_1, ce qui exclut qu'elles puissent être asymptotes toutes les deux à la séparatrice de h.

Si on répète cet argument pour les petits temps négatifs de Y, on obtient que Y est uniquement intégrable au voisinage de x, et donc aussi λ (on rappelle que l'unique feuilletage intégral de λ est obtenu en poussant le feuilletage intégral de Y par le flot de X qui est C^∞).

Dans le cas où une séparatrice stable de h provient d'un foyer et l'autre d'une selle h', on est sûr que (par généricité) les deux séparatrices stables de h' proviennent d'un foyer. On peut alors appliquer le raisonnement précédent le long des deux séparatrices instables de h' pour obtenir que λ y est uniquement intégrable, et donc également au voisinage de celles-ci.

Reste le cas où la deuxième séparatrice stable de h provient d'une naissance-mort n, génériquement de l'intérieur de la partie foyer. Si λ n'était pas uniquement intégrable près de x, on trouverait une petite transversale γ dont tous les points peuvent être atteints depuis x par des petits arcs tangents à Y. Un petit sous-arc γ' de γ serait constitué de points issus d'un petit arc de foyers (soient proches de n, soient proches du foyer dont provient génériquement la séparatrice stable de n). De ces foyers sont issues les séparatrices stables de selles proches de h. On raisonne alors comme dans le premier cas pour conclure. Le champ λ est donc uniquement intégrable au voisinage des séparatrices stables de h.

L'argument développé dans le dernier sous-cas fournit également que si l'orbite d'un point x provient de l'intérieur de la partie foyer d'une naissance-mort n, alors λ est uniquement intégrable au voisinage de x. Le cas où l'orbite de x est issue du bord de la partie foyer d'une naissance-mort se traite de manière identique à celle des séparatrices instables des selles. (On est dans la situation générique où la séparatrice stable de la naissance-mort provient d'un foyer.) Enfin, le cas où $x \in \Delta_+$ (essentiellement si x est une selle ou une naissance-mort, puisque celui des foyers est déjà traité) s'étudie par des méthodes similaires. □

Le résultat suivant donne un moyen, par isotopie de ξ_+ et ξ_-, de modifier l'ensemble des contacts positifs Δ_+. Il pourrait permettre dans certains cas de rendre une paire transitive. C'est une version du lemme de création/élimination de singularités de [Gi1] pour les paires.

Proposition 3.5. *Soient (ξ_+, ξ_-) une paire de structures de contact, γ une courbe fermée positivement transversale à ξ_+ et ξ_-. On suppose que $\gamma \cap \Delta = \emptyset$ et qu'un voisinage $U \simeq \gamma \times D^2$ de $\gamma \simeq \gamma \times \{0\}$ est tel que $\xi_+ \cap \xi_- = \xi_+\{*\} \times D^2 = \xi_-\{*\} \times D^2$. Alors, il existe une isotopie de ξ_+ et une isotopie de ξ_- à supports dans U menant à une paire (ξ'_+, ξ'_-) telle que $\xi'_+ \cap \xi'_- = \xi'_+\{*\} \times D^2 = \xi'_-\{*\} \times D^2$ et que les feuilletages caractéristiques $\xi'_+\{*\} \times D^2$ et $\xi'_-\{*\} \times D^2$ soient tous les deux égaux à un même feuilletage présentant une selle et un foyer positifs en position d'élimination.*

Remarque 6. Dans cette proposition, le lieu des contacts positifs est modifié par l'ajout de deux composantes « parallèles », l'une formée de la réunion des selles, l'autre de la réunion des foyers inclus dans U.

Démonstration. Soit $D^2_\epsilon \subset D^2$. On dessine sur D^2_ϵ un feuilletage de divergence positive constitué d'une selle et d'un foyer positif en position d'élimination. Il est défini comme noyau d'une 1-forme β avec $d\beta > 0$. On munit $S^1 \times D^2_\epsilon$ de la paire de structures de contact $\zeta_\pm$ d'équations $dt \pm \epsilon'\beta = 0$, $t \in S^1$. On dépose cette paire sur un voisinage tubulaire ϵ-petit $U_\epsilon \simeq \gamma \times D_\epsilon$ de γ, $D_\epsilon \subset D$, identifié à $S^1 \times D^2_\epsilon$. On fait en sorte $\zeta_+ \cap \zeta_- = \xi_+ \cap \xi_-$ le long de ∂U_ϵ. Il est alors possible [Gi1], pour ϵ' et ϵ assez petits, de raccorder ζ_+ à ξ_+ et ζ_- à ξ_- par une paire de structures transversales à $\frac{\partial}{\partial t}$ et à $T(\{*\} \times D^2)$ sur $U \setminus U_\epsilon$ – et donc transversales entre elles – et dont l'intersection est dans $T(\{*\} \times D^2)$. La paire obtenue par recollement est la paire (ξ'_+, ξ'_-) recherchée. Les structures $\xi'_\pm$ et $\xi_\pm$ sont isotopes comme dans [Gi1]. □

Au lieu de s'intéresser aux paires positives de structures de contact tendues, on peut s'intéresser aux paires pour lesquelles deux points quelconques de V peuvent être joints par un arc positivement transversal à ξ_+ et ξ_- (et donc en particulier par un arc positivement transversal à λ, ce qui mime la définition de feuilletage tendu). Celles-ci sont automatiquement positives. On parlera alors de paire *fortement tendue*. Dans ce cas, on peut simplifier Δ_+.

Proposition 3.6. *Si (ξ_+, ξ_-) est une paire normale et fortement tendue, alors il existe une isotopie de ξ_+ en une structure ξ'_+ telle que la paire (ξ'_+, ξ_-) soit normale et fortement tendue et que le lieu des contacts Δ_+ soit transversal à ξ'_+ et ξ_- (en particulier, il n'y a pas de naissance-mort).*

Démonstration. C'est le cas relatif de la preuve de la proposition 3.5. On relie les contacts quadratiques par une collection d'arcs positivements transversaux à $\xi_\pm$ qui évitent Δ_+. Près des contacts quadratiques, on prend soin que ces arcs soient situés dans le demi-espace, délimité par $\xi_+ = \xi_-$, qui ne contient pas Δ_+. En particulier, la direction de X le long de ces arcs converge au bord vers la direction de la demi-séparatrice de type selle des naissances-morts. On modifie alors ξ_+ et ξ_- le long de chacun de ces arcs pour faire apparaître deux familles de contacts parallèles, l'une constituée de foyers, l'autre de selles, qui permettent de faire disparaître les naissances-morts. $\square$

Remarque 7. Dans le cas général, si Δ est sans contact quadratique avec $\xi_\pm$, on peut définir sur $V \setminus \Delta$ deux champs de plans transversaux, qui se comportent le long de Δ à la manière du plan tangent à un feuilletage d'énergie finie près de son lieu singulier [HWZ].

Exemple. Si (K, θ) est une décomposition de V en *livre ouvert*, la construction de Thurston et Winkelnkemper [TW], systématisée par Giroux dans [Gi3], fournit une paire (ξ_+, ξ_-) de structures de contact *portées* par (K, θ) pour laquelle $\Delta_- = K$ (et est constitué de foyers) et dont la restriction à $V \setminus N(K)$ est fortement tendue (voir [Gi3] pour une description de ces notions). À l'aide de la proposition 3.6, on peut également en obtenir une (normale) pour laquelle de surcroît Δ_+ est transversale à ξ_+, ainsi qu'aux pages de (K, θ).

Si λ est uniquement intégrable, et si (ξ_+, ξ_-) est normale et fortement tendue, alors le feuilletage intégral $\mathcal{F}$ de λ est tendu. Comme les structures $\xi_\pm^t$ convergent vers $\mathcal{F}$, elles sont tendues et aussi ξ_+ et ξ_-.

Réciproquement, si ξ_+ et ξ_- sont tendues, forment une paire normale et si λ est uniquement intégrable, alors λ est sans composante de Reeb homologue à zéro. Dans le cas où la variété V est une sphère d'homologie rationnelle atoroïdale, $\mathcal{F}$ est tendu. On peut alors montrer que la paire (ξ_+, ξ_-) peut être déformée (par une isotopie de ξ_+) en une paire fortement tendue.

Proposition 3.7. *Soit (ξ_+, ξ_-) une paire normale positive de structures tendues sur une sphère d'homologie rationnelle atoroïdale. Si λ est uniquement intégrable, alors (ξ_+, ξ_-) est déformable, par une isotopie de ξ_+, en une paire normale et fortement tendue.*

Démonstration. Comme on l'a déjà signalé plus haut, sous les hypothèses de la proposition 3.7, le théorème 3.3 implique que le feuilletage intégral de λ est sans composante de Reeb. De plus, comme la variété ambiante est atoroïdale, il est sans composante de Reeb généralisée, c'est-à-dire qu'il est tendu.

Il suffit de montrer que pour t assez grand, la paire (ξ_+^t, ξ_-^t) est fortement tendue. Pour cela, on va utiliser un système d'arcs transversal à λ et utiliser la proximité entre λ et $\xi_\pm^t$.

On se donne deux familles de boules $(B_i(1))_{1 \leq i \leq n}$ et $(B_i(2))_{1 \leq i \leq n}$ dans V avec les propriétés suivantes :

- $\mathrm{Int}(B_i(1))$ recouvre V ;
- $B_i(1) \subset \mathrm{Int}\, B_i(2)$;
- il existe un difféomorphisme $\phi : B_i(2) \to B(0,2) \subset \mathbb{R}^3$, avec $\phi(B_i(1)) = B(0,1)$ et $\phi_* \lambda$ est ϵ-C^0-proche de $\{dz = 0\}$.

Sous ces hypothèses, si ϵ est petit, on peut joindre tout point de $B_i(1)$ (resp. le pôle sud de $B_i(2)$) au pôle nord de $B_i(2)$ (resp. tout point de $B_i(1)$) par un arc positivement transversal à λ, dont l'angle avec λ est en tout point supérieur à une certaine constante c.

En particulier, si t est assez grand ($> t_0$), on peut joindre tout point de $B_i(1)$ (resp. le pôle sud de $B_i(2)$) au pôle nord de $B_i(2)$ (resp. tout point de $B_i(1)$) par un arc positivement transversal à ξ_+ et ξ_-.

On se donne alors pour tout couple (i, j), $1 \leq i, j \leq n$, deux arcs qui relient les pôles nord et sud de $B_i(2)$ aux pôles sud et nord de $B_j(2)$ et qui sont positivement transversaux à λ. L'existence de ces arcs est assurée par le fait que le feuilletage intégral de λ est tendu. À nouveau, si t est assez grand ($> t_1$), chacun de ces arcs est positivement transversal à

ξ_+^t et ξ_-^t. Pour conclure, on remarque que si $t > max(t_0, t_1)$, et si $x \in B_i(1)$, $y \in B_j(1)$ sont deux points quelconques de V, on peut joindre x à y par un chemin transversal à ξ_+ et ξ_- en concaténant un chemin entre x et le pôle nord de $B_i(2)$, le chemin entre le pôle nord de $B_i(2)$ et le pôle sud de $B_j(2)$ et un chemin entre le pôle sud de $B_i(2)$ et y. ☐

Remarque 8. L'isotopie qui déforme ξ_+ ne préserve pas ξ_- et on ne peut donc pas dire *a priori* que la paire initiale est fortement tendue.

4 Variétés à bords sphériques

Dans le cas des variétés bordées par une sphère, se donner une paire positive tendue « convexe au bord » est très fortement contraignant pour la variété. On notera un analogue frappant de ce résultat obtenu *via* une méthode de remplissage par des disques holomorphes [EH].

Théorème 4.1. *Soit V une variété compacte connexe de dimension trois avec $\partial V = S^2$. Si on suppose que V porte une paire positive (ξ_+, ξ_-) de structures tendues telle que Δ_+ rencontre ∂V transversalement en deux points S et N et que X soit strictement sortant de V le long de $\partial S \setminus (S \cup N)$, alors $V \simeq B^3$.*

Démonstration. D'après la proposition 2.1, on peut se ramener au cas où la paire (ξ_+, ξ_-) est normale. La condition au bord nous dit que le champ de plans λ est bien défini sur V. Il est transversal à ∂V en dehors de N et S. La courbe Δ_+ rencontre ∂V aux points N et S en un foyer de X. En particulier, λ est uniquement intégrable, lisse, et s'intègre en un feuilletage en disques au voisinage de ces pôles.

Soit A l'ensemble des points de V qui appartiennent à un disque intégral de λ, de classe nulle dans $H_2(V, \partial V, \mathbb{Z})$ et le long duquel λ est uniquement intégrable. On montre que A est ouvert et fermé dans V, et donc égal à V par connexité de V.

Lemme 4.2. *A est fermé.*

Démonstration. Soit x un point de V, limite d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A, situés tous « au-dessus » de x, par rapport à $\lambda(x)$, c'est-à-dire que, si D_n désigne le disque intégral de λ passant par x_n, x est situé dans la composante de $V \setminus D_n$ qui contient S. On note D l'ensemble des points d'adhérence de la famille D_n.

Si $y \in D$ est la limite d'une suite $(y_{\phi(n)})$ de points de $D_{\phi(n)}$, alors dans un petit voisinage cylindrique $U = D^2 \times [-1, 1]$ de $y = (0, 0, 0)$, la composante de $D_{\phi(n)} \cap U$ qui contient $y_{\phi(n)}$ est le graphe d'une fonction $f_{\phi(n)}$ de classe C^1 au-dessus de D^2, et qui est strictement positive en $(0, 0)$ car x est au-dessous des disques D_n, et donc aussi y. D'après le théorème d'Ascoli, une sous-suite de la suite $(f_{\phi(n)})$ converge uniformément vers une fonction f. C'est alors aussi le cas de la suite elle-même car les graphes sont deux à deux disjoints. La suite des plans tangents aux graphes des $f_{\phi(n)}$ converge elle aussi, car c'est $\lambda|_{D_{\phi(n)}}$, et on en déduit que le graphe de f est un disque intégral de λ, inclus dans D. On remarque maintenant que la composante connexe de $D \cap U$ qui contient y est égale au graphe de f. Ceci résulte du fait que les disques D_n sont deux à deux disjoints, car λ est uniquement intégrable le long de D_n, et tous situés au-dessus du graphe de f.

En conclusion, on obtient que D est une surface intégrale de λ. Un argument de Haefliger [Ha] fournit que D est compacte, car limite de feuilles compactes. Comme elle est limite de disques, on obtient alors également que D est un disque de classe C^1. Son feuilletage caractéristique $\lambda D = \xi_+ D = \xi_- D$ dirigé par X est sortant le long du bord. Comme $\xi_\pm$ sont tendues, il ne possède pas de cycle limite et toutes les feuilles sont issues d'une singularité de $\xi_\pm D = \Delta_+ \cap D$. C'est même le cas de toute orbite passant au voisinage de D, comme dans le lemme 4.3. Le plan λ est donc uniquement intégrable le long de D d'après le théorème 3.4. On raisonne de même lorsque x est situé « au-dessus » des disques de la famille (D_n), ce qui permet de conclure dans tous les cas. $\square$

Lemme 4.3. *A est ouvert.*

Démonstration. Si $x \in A$ est situé sur un disque intégral D de λ, toutes les feuilles de $\xi_\pm D$ proviennent d'une singularité de $\xi_\pm D$, c'est-à-dire d'un point de $D \cap \Delta_+$ (comme $\xi_\pm$ sont tendues, $\xi_\pm D$ ne contient pas de cycle limite et par ailleurs $\xi_\pm D$ est transversal à ∂D).

Si $\xi_\pm D$ est de type Morse-Smale, toutes les orbites passant par un point proche de D sont issues de Δ_+ (et même de foyers ou de selles de Δ_+). Ceci implique, *via* le théorème 3.4, que λ est uniquement intégrable dans un voisinage de D. Un voisinage de D est donc feuilleté par des disques intégraux de λ d'après le théorème de stabilité de Reeb.

Si $\xi_\pm D$ possède une naissance-mort n, elle est génériquement unique sur D. Celle-ci est située sur une branche Δ de Δ_+. La séparatrice stable de n provient d'un foyer e de $\xi_\pm D$ situé sur une composante Δ' de Δ_+. D'un côté de D, les orbites proches de celles qui proviennent de n sont toutes issues d'un voisinage de n dans Δ, et de l'autre côté de D elles sont toutes issues d'un voisinage de e dans Δ'. Comme précédemment, on conclut en remarquant que X est transitif au voisinage de D.

La même propriété de transitivité au voisinage de D est vérifiée si $\xi_\pm D$ présente une connexion entre deux selles. $\square$

Ceci montre que V est feuilletée par des disques et termine la preuve du théorème 4.1. $\square$

Problème. Peut-on montrer que si V porte une paire positive de structures de contact tendues, alors elle est irréductible ?

Références

[Be] D. Bennequin, *Entrelacements et équations de Pfaff*, Astérisque **107-108** (1983), 87–161.

[Co1] V. Colin, *Structures de contact tendues sur les variétés toroïdales et approximation de feuilletages sans composante de Reeb*, Topology **41** (2002), 1017–1029.

[CGH1] V. Colin, E. Giroux, and K. Honda, *On the coarse classification of tight contact structures,* Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **71** (2003), 109–120.

[El] Y. Eliashberg, *Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet's work*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **42** (1992), 165–192.

[EH] Y. Eliashberg et H. Hofer, *A Hamiltonian characterization of the three-ball*, Journal of Differential and Integral Equations, **7** No.5 (1994), 1303–1324.

[ET] Y. Eliashberg and W. Thurston, *Confoliations*, University Lecture Series **13**, Amer. Math. Soc., Providence (1998).

[Gi1] E. Giroux, *Convexité en topologie de contact*, Comment. Math. Helv. **66** (1991), 637–677.

[Gi2] E. Giroux, *Structures de contact en dimension trois et bifurcations des feuilletages de surfaces*, Invent. Math. **141** (2000), 615–689.

[Gi3] E. Giroux, *Géométrie de contact : de la dimension trois vers les dimensions supérieures*, Proceedings of the ICM, Vol. II (Beijing 2002), Higher Ed. Press, Beijing (2002), 405–414.

[Gr] J. Gray, *Some global properties of contact structures*, Ann. of Math. **69** (1959), 421–450.

[Ha] A. Haefliger, *Variétés feuilletées*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **16** (1962), 367–397.

[Har] Hartman, *Ordinary differential equations*, John Wiley and Sons, Inc. us New York, NY (1964).

[HWZ] H. Hofer, K. Wyzocki, E. Zehnder, *Finite energy foliations of tight three spheres and hamiltonian dynamics*, Ann. of Math. **157** No.1 (2003), 125–255.

[Ho1] K. Honda, *On the classification of tight contact structures I*, Geom. Topol. **4** (2000), 309–368.

[Ho2] K. Honda, *On the classification of tight contact structures II*, J. Differential Geom. **55** (2000), 83–143.

[Mi1] Y. Mitsumatsu, *Anosov flows and non-Stein symplectic manifolds*, Annales de l'institut Fourier, **45** No.5 (1995), 1407–1421.

[Mi2] Y. Mitsumatsu, *Foliations and contact structures on* 3*-manifolds*, Foliations : geometry and dynamics (Warsaw, 2000), World Sci. Publ., River Edge, NJ (2002), 75–125.

[Pe] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, arXiv :math/0211159.

[Th] W. Thurston, *A norm for the homology of 3-manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. **59** (1986), 99–130.

[TW] W. Thurston et H. Winkelnkemper, *On the existence of contact forms*, Proc. Amer. Math. Soc. **52** (1975), 345–347.

[Za1] S. Zannad, *Surfaces branchées en géométrie de contact*, Thèse de l'université de Nantes (2006).

[Za2] S. Zannad, *A sufficient condition for a branched surface to fully carry a lamination*, Alg. Geom. Topol. **7** (2007), 1599-1632.

Université de Nantes, Laboratoire de mathématiques Jean Leray, UMR 6629 du CNRS, 44322 Nantes, France
Vincent.Colin@math.univ-nantes.fr

Universidade Federal Fluminense, Niterói, Rio de Janeiro, Brazil
firmo@mat.uff.br